Universidade Federal Fluminense - GMA

VE1 - Cálculo 2B - Turma I1 - Prof. Zhou Cong

Nome Completo: ____ Data: 16 de Maio de 2019

Questão 1 (20 pts)**.** Escolha apenas **uma** dentre as três opções a seguir para ser o formato do conjunto C: paraboloide de concavidade voltada para baixo, uma das folhas de um hiberbolóide de duas folhas e hemisfério superior da esfera. Defina três funções F, G e H de modo que:

$$C = \mathrm{Gr}(F) = C_0(G) = \mathrm{Im}(H),$$

explicite a **expressão**, o **domínio** e o **contradomínio** dessas funções.

Observação: $Gr(F)$ é o gráfico da função F, $C_0(G)$ é o conjunto de nível 0 da função G e $Im(H)$ é a imagem da função H. Queremos definir essas três funções de modo que o conjunto C escolhido seja igual ao gráfico de F, conjunto de nível 0 de G e imagem de H simultâneamente.

Questão 2 (20 pts)**.** Considere as funções $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ e $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ com:

$$u(x, y) = (x + y + 1)^2 \quad \text{e} \quad v(x, y) = y + 1.$$

Além disso, $F(0, 0) = F(1, 1) = 5$, $\nabla F(0, 0) = (1, 2)$ e $\nabla F(1, 1) = (-1, -1)$. Seja $H(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$.

(a) (10 pts) Encontre o gradiente $\nabla H(0, 0)$.

(b) (10 pts) Suponha que F é diferenciável, encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função H no ponto $(0, 0, 5)$.

Questão 3 (20 pts)**.** Responda os itens abaixo justificando a sua resposta:

(a) (10 pts) Considere a curva $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^4$ dada por $\gamma(t) = (e^t, \ln(t), t, -t)$, escolha um ponto que pertence à imagem desta curva e escreva uma parametrização da reta tangente à curva no ponto escolhido.

(b) (10 pts) Encontre um valor k inteiro positivo (> 0) para que a expressão abaixo f seja uma função diferenciável no ponto $(0, 0)$, e mostre que para o valor k encontrado da função é diferenciável em todo ponto:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^{2k}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Questão 4 (40 pts)**.** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}^2(x + y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, & x \geq -y \text{ e } (x, y) \neq (0, 0), \\ \dfrac{-\mathrm{sen}^2(x + y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, & x < -y, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) (15 pts) Mostre que a função f é contínua no ponto $(0, 0)$.

(b) (15 pts) Usando a definição, calcule, caso existir, as derivadas parciais da função f no ponto $(0, 0)$.

(c) (10 pts) A função f é diferenciável no ponto $(0, 0)$? Justifique a resposta demonstrando a diferenciabilidade ou o contrário.

Dica: Esta função está definida com fórmulas diferentes nos seguintes três conjuntos:

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq -y \text{ e } (x, y) \neq 0\}, \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < -y\} \quad \text{e} \quad C_3 = \{(0, 0)\}.$$

Esboçe esses conjuntos, note que o ponto $(0, 0)$ é um ponto de acumulação dos conjuntos C_1 e C_2. Então para verificar a continuidade e existência e o valor das derivadas parciais de f é preciso fazer duas contas: a primeira para a fórmula da função f no conjunto C_1 e a segunda para a fórmula da função f no C_2.

No item (b), ao verificar a existência e para encontrar o valor das derivadas parciais você provavelmente vai precisar usar limites laterais ($\lim_{t\to 0^-}$ e $\lim_{t\to 0^+}$). Ao fazer as contas, encontrará dentro desses limites uma expressão contendo algum termo da forma $\sqrt{t^2} = |t|$, lembre-se em usar a definição da norma, que é: $|t| = -t$ se $t < 0$ e $|t| = t$ se $t \geq 0$.